積分と漸化式

問題

(1) 等式 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$ を用いて，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$ の値を求めよ。

(2) $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^n\theta}d\theta$ とおくとき，I_{n+2} を I_n で表せ。

（n は 0 以上の整数とする）

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^5\theta}d\theta$ の値を求めよ。

(1) 解答

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{(1+\sin\theta)'}{1+\sin\theta}-\frac{(1-\sin\theta)'}{1-\sin\theta}\right\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\Big[\log(1+\sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\Big[\log(1-\sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\log(\sqrt{2}+1)$$ 答

(2) 解答

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^n\theta}d\theta=\left[\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^n\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\cdot(\cos^{-n}\theta)'\,d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-n}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{n\sin\theta}{\cos^{n+1}\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=(\sqrt{2})^n-n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^{n+2}\theta}d\theta$$

$$=(\sqrt{2})^n-n(I_{n+2}-I_n)$$

よって，$(n+1)I_{n+2}=(\sqrt{2})^n+nI_n \iff \underline{I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}\{(\sqrt{2})^n+nI_n\}}$ 答

(3) 解答 まず，(2) で求めた漸化式より，$I_3=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+I_1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^5\theta}d\theta=I_5=\frac{1}{3+1}\{(\sqrt{2})^3+3I_3\}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{4}I_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{8}\{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\}$$

$$\underline{=\frac{7}{8}\sqrt{2}+\frac{3}{8}\log(\sqrt{2}+1)}$$ 答

解説 (1) は教科書に載っている有名な積分であるが，以下の式変形を有効に利用しているのがよい。

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$$

(2) は，部分積分法を用いて，「積分漸化式」をつくっていく過程を示しており，(3) のように利用されるところがおもしろい。三角関数以外でも「積分漸化式」が可能であり，定積分の計算に利用される。

山脇の超数学講座　No. 55

発展　次の定積分を求めよ。

(1)　$J_1=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$　　(2)　$J_3=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(3)　$J_5=\displaystyle\int_0^1(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\,dx$

(1) 解答　まず，$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より，

$$J_1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\Big[\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big]_0^1=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$ 答

(2) 解答　$J_3=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx=\Big[x\sqrt{x^2+1}\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$$=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\sqrt{2}-J_3+J_1$$

よって，$2J_3=\sqrt{2}+J_1$，　　$J_3=\dfrac{1}{2}\{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\}$　答

(3) 解答　$J_5=\displaystyle\int_0^1(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\,dx=J_3+\int_0^1x^2\sqrt{x^2+1}\,dx=J_3+K$　とおく。

$$K=\left[\frac{x^3}{3}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^2+1)x^2-(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}(K-J_3+J_1)=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}K+\frac{1}{3}J_3-\frac{1}{3}J_1$$

$\dfrac{4}{3}K=\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{1}{3}J_3-\dfrac{1}{3}J_1$　より，　$K=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{4}J_3-\dfrac{1}{4}J_1$

よって，$J_5=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{5}{4}J_3-\dfrac{1}{4}J_1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{5}{8}\{\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\}-\dfrac{1}{4}\log(\sqrt{2}+1)$

$$=\frac{7}{8}\sqrt{2}+\frac{3}{8}\log(\sqrt{2}+1)$$ 答

解説　発展 では，「問題とはまったく異なる関数であり，積分の方法も違うのに答えが同じになるのはなぜか？」という疑問を持つことであろう。

しかし，発展 の (1) で，$x=\tan\theta$ と置換すると，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

および　右の表による変換に基づき，

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$J_1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=I_1$$ となって符合する。

同様にして，$J_3=I_3$，$J_5=I_5$ も示される。　置換積分法 の 妙味である。

特に，J_3 は，「曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ $(0\leqq x\leqq1)$ の長さ」などに使われるので覚えておいてよいだろう。